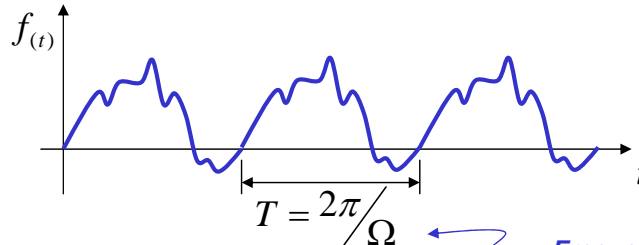




- I. Introducción
- II. Sistema de 1-GDL
 - Descripción
 - Ec. de movimiento
 - Resp. libre
 - Resp. forzada**
 - Fuerza constante
 - Armónica simple
 - Excitación periódica**
 - Excitación impulsiva
 - Excitación general
- III. Sistemas de N-GDL
- IV. Medición / diagnóstico
- V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación periódica (i)



Frecuencia fundamental de excitación

Transformada de Fourier

$$f_{(t)} \text{ periódica} \Leftrightarrow f_{(t)} = \frac{f_0^C}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} f_j^C \text{Cos}(j\Omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} f_j^S \text{Sen}(j\Omega t)$$

Función continua:

$$f_j^C = \frac{2}{T} \int_0^T f_{(t)} \text{Cos}(j\Omega t) dt \quad j=0,1,2,\dots$$

$$f_j^S = \frac{2}{T} \int_0^T f_{(t)} \text{Sen}(j\Omega t) dt \quad j=1,2,\dots$$

Función discreta:

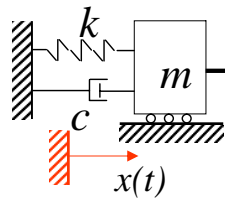
$$f_j^C = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f_i \text{Cos}\left(\frac{2j\Omega t_i}{T}\right) \quad j=0,1,2,\dots$$

$$f_j^S = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f_i \text{Sen}\left(\frac{2j\Omega t_i}{T}\right) \quad j=1,2,\dots$$



- I. Introducción
- II. Sistema de 1-GDL
 - Descripción
 - Ec. de movimiento
 - Resp. libre
 - Resp. forzada**
 - Fuerza constante
 - Armónica simple
 - Excitación periódica**
 - Excitación impulsiva
 - Excitación general
- III. Sistemas de N-GDL
- IV. Medición / diagnóstico
- V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación periódica (ii)



$$f_{(t)} = \frac{f_0^C}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} f_j^C \text{Cos}(j\Omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} f_j^S \text{Sen}(j\Omega t)$$

Armónicas de la frecuencia fundamental de excitación

Ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_N\dot{x} + \omega_N^2 x = \frac{f_0^C}{2m} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j^C}{m} \text{Cos}(j\Omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j^S}{m} \text{Sen}(j\Omega t)$$

Solución propuesta: $x_{(t)} = x_{h(t)} + x_{p(t)}$

Sol. homogénea (transit.): $x_{h(t)} = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \text{Cos}(\omega_d t) + A_2 \text{Sen}(\omega_d t)]$

Sol. particular (permanente):

$$x_{p(t)} = \frac{f_0^C}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^C \text{Cos}(j\Omega t - \gamma_j) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^S \text{Sen}(j\Omega t - \gamma_j)$$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

- Descripción
- Ec. de movimiento
- Resp. libre
- Resp. forzada**
 - Fuerza constante
 - Armónica simple
 - Excitación periódica**
 - Excitación impulsiva
 - Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

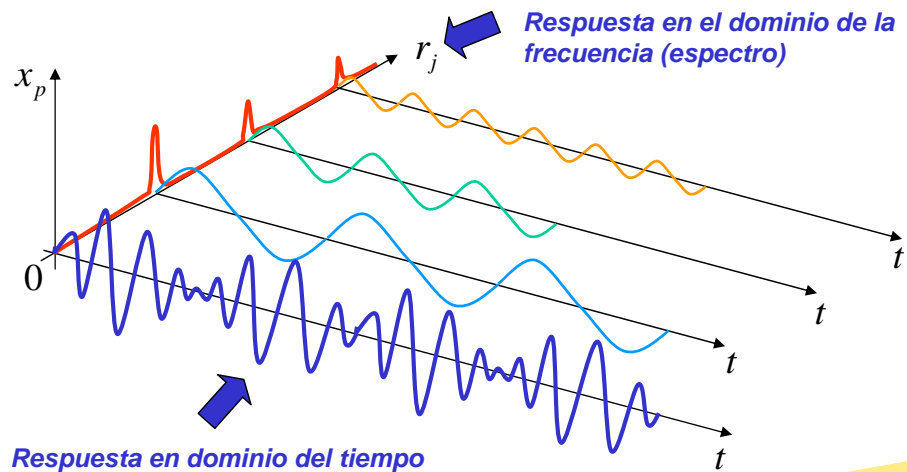
IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación periódica (iii)

$$x_p(t) = \frac{f_0^C}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^C \cos(j\Omega t - \gamma_j) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^S \sin(j\Omega t - \gamma_j)$$

$$X_j^{C,S} = \frac{f_j^{C,S}/k}{\sqrt{(1-r_j^2)^2 + (2\zeta r_j)^2}} \quad \gamma_j = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r_j}{1-r_j^2}\right) \quad r_j = \frac{j\Omega}{\omega_N}$$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

- Descripción
- Ec. de movimiento
- Resp. libre
- Resp. forzada**
 - Fuerza constante
 - Armónica simple
 - Excitación periódica**
 - Excitación impulsiva
 - Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación periódica (iv)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] + \frac{f_0^C}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^C \cos(j\Omega t - \gamma_j) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^S \sin(j\Omega t - \gamma_j)$$

Dependen de las condiciones

iniciales $x_{(t=0)} = x_0$
 $\dot{x}_{(t=0)} = v_0$

$$A_1 = x_0 - \frac{f_0^C}{2k} - \sum_{j=1}^{\infty} X_j^C \cos(\gamma_j) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^S \sin(\gamma_j)$$

$$A_2 = \frac{v_0}{\omega_d} + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \left[x_0 - \frac{f_0^C}{2k} - \sum_{j=1}^{\infty} X_j^C \cos(\gamma_j) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^S \sin(\gamma_j) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^C j\Omega \sin(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{\infty} X_j^S j\Omega \cos(\gamma_j)$$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción
Ec. de movimiento
Resp. libre

Resp. forzada

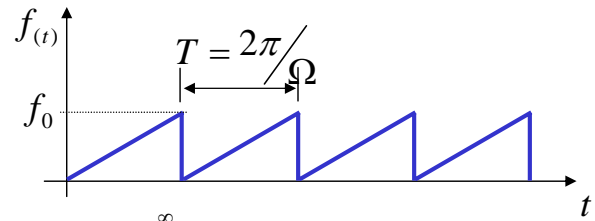
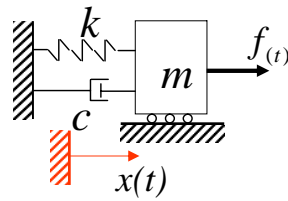
Fuerza constante
Armónica simple
Excitación periódica
Excitación impulsiva
Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación periódica (v)



$$f(t) = \frac{f_0^C}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} f_j^C \cos(j\Omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} f_j^S \sin(j\Omega t)$$

$$f_{(t)} \text{ es par } \rightarrow \left. \begin{aligned} f_0^C &= f_0 \\ f_j^C &= 0 \\ f_j^S &= \frac{f_0}{j\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{f_0}{j\pi} \right) \sin(j\Omega t)$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{f_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{f_0}{jk\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-r_j^2)^2 + (2\zeta r_j)^2}} \sin(j\Omega t - \gamma_j)$$

$$r_j = \frac{j\Omega}{\omega_n} ; \gamma_j = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r_j}{1-r_j^2} \right)$$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción
Ec. de movimiento
Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante
Armónica simple
Excitación periódica
Excitación impulsiva
Excitación general

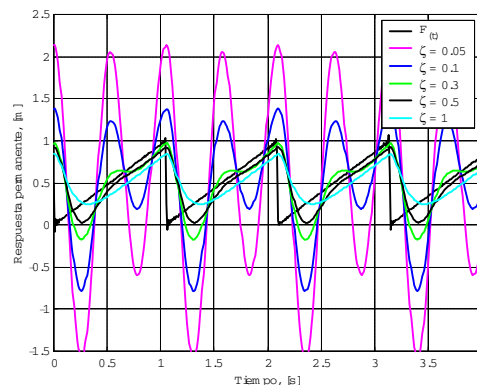
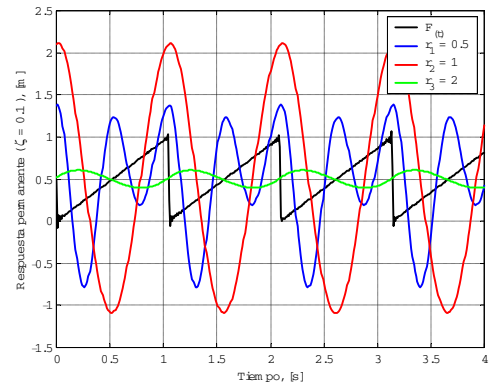
III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación periódica (vi)

Respuesta para varias relaciones de frecuencia ($\zeta = 0.1$)



Respuesta para varios factores de amortiguación ($r = 0.5$)



Resp. forzada: Excitación periódica (vii)

I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción

Ec. de movimiento

Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante

Armónica simple

Excitación periódica

Excitación impulsiva

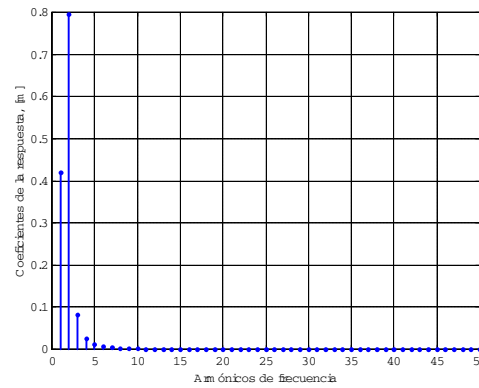
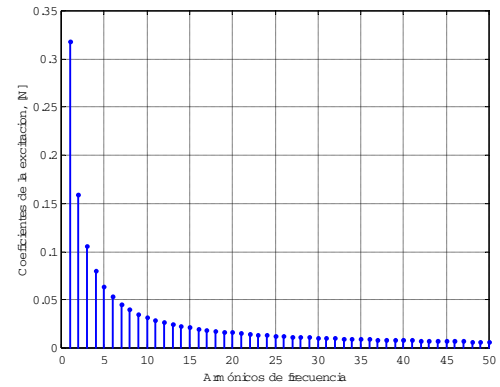
Excitación general

III. Sistemas de N -GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Espectro de la excitación



Espectro de la respuesta
($r = 0.5$, $\zeta = 0.1$)